:

NOMBRE:

NOTA…………

EXAMEN de RESCATE (15/1/2014) 1B y 4B

1. *(2,5 ptos.)*Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 4x+y+4z+t=0 \end{cases} \text{ y } \mathbf{T} \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}\text{., se pide:}$$

a) *(0,5 ptos.)* Obtener una base del subespacio **S** b) *(ptos.0,5)*Obtener ecuaciones implícitas de **T** c) *(0,6 ptos.)*Obtener una base del subespacio <u>intersección</u> de ambos: d) *(0,6 ptos.)* La base Usual del subespacio SUMA de ambos e) *(0,3 ptos.)*Verificar que se cumple la fórmula de las dimensiones

2. *(2,5 ptos5)*Dado el subespacio vectorial $\mathbf{U} \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$ Se pide:

A) *(1pto.)*Determinar una base ortonormal del mismo

B) *(1pto.))*Calcular las ecuaciones implícitas de su complemento Ortogonal.

C) *(0,5 ptos.)*Proyectar el vector $\vec{v} = (1,1,1,3)$ sobre el subespacio vectorial U.

3. *(1,5 ptos.)*Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que

$$f(1,1,1) = (1,-1,1), f(-1,1,1) = (1,2-2,). f(-1,-2,1) = (1,0,0).$$

Se pide,:

A) *(0,5 ptos.)*Obtener su matriz con respecto a las bases canónicas $\mathcal{M}(f, B_3^C, B_3^C)$.

B) *(05, ptos.)*Obtener la matriz de *f* respecto de la base B^*={(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-2,1)} en el espacio inicial y la base canónica en el final, $\mathcal{M}(f, B^*, B_3^C)$

C) *(0,4 ptos.)*Hallar la imagen de f. *(0,1 ptos.)*¿Es epimorfismo? ¿ Por qué?

4. *(2,5 ptos.)*Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) *(1,5 ptos.)*calcular A^{36}, usando la fórmula de diagonalización

b) *(1pto.)*Especificar la base de diagonalización asociada

5. *(1pto.)* Clasificar y calcular los elementos geométricos de las aplicaciones ortogonales cuyas matrices asociadas son, respectivamente:

a) $(0{,}5, ptos.)\ M(f, B^C) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

b) $(0{,}5, ptos.)\ M(g, B^C) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

OBSERVACIONES: No se permite el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos
Para realizar el examen disponen de dos horas.

NOMBRE:

NOTA…………

EXAMEN de RESCATE (15/1/2014) 1B y 4B SOLUCIONES

1. *(2,5)*Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 4x+y+4z+t=0 \end{cases} \text{ y } T \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}\text{., se pide:}$$

a) *(0,5)* Obtener una base del subespacio S b) *(0,5)*Obtener ecuaciones implícitas de T c) *(0,6)*Obtener una base del subespacio <u>intersección</u> de ambos: d) *(0,6)* La base Usual del subespacio SUMA de ambos e) *(0,3)*Verificar que se cumple la fórmula de las dimensiones

SOLUCIÓN:

a) Obtener una base del subespacio S . Para ello reducimos la matriz de coeficientes del sistema dado

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-1&2&-1\\4&1&4&1\end{pmatrix}\underset{E_{31}(-4)}{\overset{\sim}{E_{21}}}(-2)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-3&0&-3\\0&-3&0&-3\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_2}\left(\frac{-1}{3}\right)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

Así, las ecuaciones implícitas que definen el subespacio son

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

Y las paramétricas serían

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=-\alpha \\ t=-\beta \end{cases},$$

Una base del mismo es $B(S)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

b) *(0,5)*Obtener ecuaciones implícitas de T. Para ello reducimos la matriz que tiene a los tres vectores del sistema de generadores dado como filas

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&1&3\\2&1&0&3\end{pmatrix}\underset{E_{31}(-2)}{\overset{\sim}{E_{21}}}(-1)\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}$$

Por lo tanto es $B(T)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Por lo que dos ecuaciones implícitas definen este subespacio. Las calculamos obligando a que la siguiente matriz tenga rango dos :

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\x&y&z&t\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_{31}}(-x)\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\0&y&z+x&t\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_{32}}(-y)\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\0&0&z+x-2y&t-3y\end{pmatrix}$$

Con lo cual es $T \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3y+t=0 \end{cases}$

c) Formamos un sistema con las cuatro ecuaciones anteriores

$$\begin{cases} S \equiv \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \\ T \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -3y+t=0 \end{cases} \end{cases}$$

Y reducimos su matriz de coeficientes

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-2&1&0\\0&1&0&1\\0&-3&0&1\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_{21}}(-1)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-3&0&-1\\0&1&0&1\\0&-3&0&1\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_{21}}(-1)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-3&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\overset{\sim}{E_{23}}(-1)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&-3&0&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

OBSERVACIONES: No se permite el uso de calculadoras o dispositivos electrónicos
Para realizar el examen disponen de dos horas.

NOMBRE:

NOTA…………

$$\underset{E_{32}(3)}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Entonces, el sistema que define a la intersección se reduce a

$$S\cap T\equiv\begin{cases}x+y+z+t=0\\ y+t=0, t=0\end{cases}$$

O, equivalentemente, $S\cap T\equiv\begin{cases}x=-z\\ y=0, t=0\end{cases}$, y será $B(S\cap T)$= $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

d) *(0,6)* La base Usual del subespacio SUMA de ambos. Sabemos que $S+T=\mathcal{L}\{B(S),B(T)\}$. Reducimos la matriz que contiene por filas a los vectores no repetidos de ambas bases

$$D=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\underset{E_{32}(-1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&3\\0&0&-2&-4\end{pmatrix}\underset{E_{23}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-2&-4\end{pmatrix}\underset{E_3\left(\frac{-1}{2}\right)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\underset{E_{13}(1)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$B^U(S+T)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

e) *(0,3)*Verificar que se cumple la fórmula de las dimensiones

la fórmula de las dimensiones es: dim(S+T)= dim(S)+ dim(T) – dim ($S\cap T$)=2+2-1=3, y, como es de ley, se cumple.

2. *(2,5)*Dado el subespacio vectorial U $\equiv\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$ Se pide:

A) *(1)*Determinar una base ortonormal del mismo
B) *(1)*Calcular las ecuaciones paramétricas de su complemento Ortogonal.
C) *(0,5)*Proyectar el vector $\vec{v}=(1,1,1,3)$ sobre el subespacio vectorial U.

SOLUCIÓN:

a) Determinar una base ortonormal del mismo

Aplicando G-S s obtiene: $\vec{o}_1=\vec{w}_1$, $\vec{o}_2=\vec{w}_2-\frac{\langle\vec{w}_2,\vec{o}_1\rangle}{\|\vec{o}_1\|^2}\vec{o}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+\frac{1}{3}\\1\\-1+\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,

$$\vec{o}_3=\vec{w}_3-\frac{\langle\vec{w}_3,\vec{o}_1\rangle}{\|\vec{o}_1\|^2}\vec{o}_1-\frac{\langle\vec{w}_3,\vec{o}_2\rangle}{\|\vec{o}_2\|^2}\vec{o}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$B^{ORTG}(U)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Normalizando los vectores es

$$B^{ORTn}(U)=\left\{\vec{o}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\vec{o}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\end{pmatrix},\vec{o}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\\frac{3}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\}$$

*(b)*Calcular las ecuaciones implícitas de su Complemento Ortogonal. $\mathrm{B}(U^{\perp})=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, puesto que al obligar a que un vector genérico de $U^{\perp}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sea ortogonal a los de la base de U , B(U)=$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, dicho vector se ve obligado a cumplir que $(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=x+z=0$ $(0\ \ 1\ \ -1\ \ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=y-z=0$, $(0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=-y+t=0$

las ecuaciones implícitas de dicho subespacio son, por lo tanto : $\begin{cases}x+z=0\\y-z=0\\-y+t=0\end{cases}$, y la base es la expresada antes.

b) Proyectar el vector $\vec{v}=(1,1,1,3)$ sobre el subespacio vectorial U.
Calculamos entonces los productos escalares que intervienen en la fórmula de la proyección:
$\langle\vec{v},\vec{o}_1\rangle=\frac{2}{\sqrt{2}},\langle\vec{v},\vec{o}_2\rangle=\frac{2}{\sqrt{6}},,\langle\vec{v},\vec{o}_3\rangle=\frac{4}{\sqrt{3}}$

El vector proyección será, $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{o}_1+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{o}_2+\frac{4}{\sqrt{3}}\vec{o}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$

4. *(2,5 ptos.)*Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}0&2&-2\\-2&-4&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

*a) (1,5 ptos.)*calcular A^{36}, usando la fórmula de diagonalización

*b) (1pto.)*Especificar la base de diagonalización asociada

SOLUCIÓN:

A) EL POLINOMIO Característico lo calculamos teniendo en cuenta que : det(A)=0, tr(A)=-4, SDP=4. Por lo que $P_3(\lambda)=-\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda=-\lambda(\lambda+2)^2$. Con lo cual $\sigma(A)=\begin{Bmatrix}0&-2\\m=1&m=2\end{Bmatrix}$

B.1. $\lambda=0$,

$Ker(A-0I)=Ker(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}0&2&-2\\-2&-4&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{cases}x=-y\\z=y\end{cases}\right\}$.

Entonces una base de este subespacio será: $B\big(Ker(A)\big)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

B.2 $\lambda=-2$, $Ker(A+2I)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&-2&2\\-2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x=-y+z\right\}$

Entonces una base de este subespacio seráB$\big((A+2I)\big)=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Por lo tanto, la matriz dada se descompone como

A=$P\Lambda\mathrm{P}^{-1}$, dónde $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y será A^{36}=$P\Lambda^{36}\mathrm{P}^{-1}$=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^{36} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

Siendo $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots$

Cómo vemos S es un subespacio de dimensión dos , la dimensión de T es tres y los vectores dados (l.i.) verifican las ecuaciones de T. Por lo tanto $S+T=T$. De sus ec. Implícitas obtenemos las paramétricas del mismo

$$P_3(\lambda)=-\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda$$

Con TREs raices $\lambda=0,-2(m=2)$